ERDÉSZNAGYJAINK ARCKÉPCSARNOKA

4.

TAMÁSSY LAJOS

MOÓR ARTHUR

(1923 - 1985)

ÉLETE ÉS MUNKÁSSÁGA

SOPRONI EGYETEM ERDŐMÉRNÖKI KAR

SOPRON

1998

A sorozatot szerkeszti:
az Erdőmérnöki Kar dékánja

ISSN 1417-8885
ISBN 963 7180 61 3

Felelős kiadó:

DR. FARAGÓ SÁNDOR
az Erdőmérnöki Kar dékánja

A szakirodalmi munkásság jegyzékét
F. Nagy Györgyi és Sz Kirkovits Magdolna
állította össze

MOÓR ARTHUR
élete és munkássága

Moór Arthur, a magyar differenciálgeometria kiemelkedő egyénisége 1985. augusztus 26-án hunyt el. A soproni Erdészeti és Faipari Egyetemen lett egyetemi tanár, és az itteni Matematikai Tanszéket vezette élete végéig, 17 éven át. A soproni Egyetem az újjáéledő magyar egyetemi és közélet nemes hagyományait követi, amikor volt tanáráról, egykori professzoráról megemlékezik. Saját magát becsüli meg az az intézmény, mely neves halottjait számon tartja.

Pár évvel ezelőtt itt Sopronban, ahol az Egyetem vendégszeretete helyet adott az 5. Osztrák-Magyar Geometriai Kollokviumnak, szakmai matematikus hallgatóság előtt emlékeztünk meg MOÓR ARTHUR matematikai munkásságáról, felsorakoztatva legfontosabb és legjelentősebb matematikai eredményeit. Így most egy általánosabb érdeklődési körű közönség előtt inkább életútjára, egyéniségére kívánok emlékezni és tudományterületének tárgyát és alapkérdéseit kísérlem megismertetni és a matematika fejlődésének történetébe ágyazni, kevésbé helyezve súlyt MOÓR ARTHUR konkrét matematikai eredményeinek felsorolására. Ez talán egy képet ad matematikai munkásságának színteréről is.

MOÓR ARTHUR Budapesten született 1923. január 8-án. Édesapja magyar-német szakos középiskolai tanár, aki egy ideig magyar lektor volt a Berlini Egyetemen, majd a Szegedi Polgári Iskolai Tanárképző Főiskolán a német nyelv tanára lett. Így MOÓR ARTHUR a német nyelvvel már fiatalon megismerkedett. Kitűnően beszélt németül. Egyetemi tanulmányait Szegeden kezdte meg matematika-fizika szakon 1941-ben, de a háború miatt csak 1947-ben fejezte be. Tagja volt az Eötvös

Kollégiumnak, ahol KALMÁR LÁSZLÓ volt a tanára. Az egyetemen is kiváló professzorai voltak: RIESZ FRIGYES, HAAR ALFRÉD, KERÉKJÁRTÓ BÉLA, SZŐKEFALVI NAGY GYULA. Ez a tanári kar valóban világszínvonalat jelentett. - Tanári oklevelének megszerzése után 1947-50-ig a Szarvasi Tanítóképző Intézetben tanított. Tudományos munkáját rögtön az egyetem befejezése után megkezdi Szarvason, a tudományos környezet és a tudományos légkör teljes hiányában. A FINSLER geometria iránt érdeklődik, amire az egyetemen az oktatás és kutatás kiemelkedő színvonala mellett is alig kaphatott indíttatást. A differenciálgeometria a két háború között hiányterület volt Magyarországon. Tudományos munkájának kezdeti eredményeivel igen gyorsan elkészül és megjelennek első dolgozatai. Ezekre felfigyel VARGA OTTÓ, a debreceni egyetem tanára, a FINSLER geometria nemrég Magyarországra hazatért kiváló művelője, és elősegíti MOÓR ARTHURNAK a debreceni Révai (ma Csokonai) Gimnáziumba való kerülését, ahol 1950-52. között tanított. Az aspirantúra intézményének megindulásakor 1953-ban VARGA OTTÓ aspiránsa lesz a Debreceni Egyetemen. Aspirantúráját 1956-ban fejezi be a kandidátusi fokozat megszerzésével. Akadémiai doktori dolgozatának címe „Geometriai vizsgálatok általános metrikus vonalelem-terekben", amit 1964-ben véd meg. Közben megnősül. Felesége LÁSZLÓ PIROSKA középiskolai tanár. Házasságukból egy leánygyermek született, EDIT. Aspirantúrája után a Szegedi Egyetemen kap állást, ahol 1956-68-ig dolgozik. Közben 1964-ben megkapja a tudományok doktora fokozatot. 1968-ban a soproni Erdészeti és Faipari Egyetemre nyer egyetemi tanári kinevezést és átveszi a Matematikai Tanszék vezetését. A kis létszámú tanszéken több munkatársát indította el a matematikai és a differenciálgeometriai kutatások útján. Távozásakor egy jól működő, jó szellemű tanszéket hagyott hátra.

Cselekedeteit elvi meggondolások irányították. Tiszteletreméltó volt és rám mély benyomást tett az a magatartása, ahogyan latolgatás nélkül utasította vissza, vagy hagyott elszaladni előnyöket, ha azok elfogadása erkölcsi, vagy cselekvési normáiból csak csekély engedményt is kívántak volna. Hasonlóképpen vállalt hátrányokat anélkül, hogy ezeket áldozatnak tekintette volna. Ez volt számára az egyetlen lehetséges, és így természetes cselekvési mód. Ez nyilvánult meg hallgatóival szembeni igazságosságában, az anyagi javakhoz való viszonyában, munkájában. Kifejezetten materialista volt, de soha nem gondolt arra, hogy ebből politikai hasznot kovácsoljon magának. A politika kívül esett érdeklődési körén, sőt csaknem minden, ami nem matematika volt. A matematika kitöltötte az életét. Ez alól talán csak a sakkozás volt kivétel. Fiatalabb korában versenyszerűen sakkozott, csapatversenyeken vett részt.

Szuverén egyéniség volt. Véleményét mások tetszésétől, vagy nemtetszésétől függetlenül alakította ki. Munkája elismerését néha lassan, csak késve kapta meg. Már amikor aspiráns lett annyi dolgozattal rendelkezett, amennyivel a többség kandidátus korára sem. Aspirantúrája befejeztével nem kapott Debrecenben állást, pedig ezt szerette volna. Akkor ez volt az egyetlen differenciálgeometriai centrum Magyarországon. Docensi kinevezését is csak doktori védésének idején kapta meg, pedig ez a fokozat akkor jóval ritkább volt, mint ma.

Igen értékelte viszont, és nagyon jól esett neki, hogy soproni kinevezésénél a soproni egyetem vezetői tudományos teljesítményére helyezték a súlyt, és minden mást e mögött másodrendűnek tekintettek. Hasonlóan nagyra értékelte azokat a megbecsülő megnyilatkozásokat, amelyekkel VARGA OTTÓ, a magyar differenciálgeométerek mestere a 60-as évektől MOÓR ARTHUR munkásságát értékelte és elismerte.

MOÓR ARTHUR egész életében igen aktívan, napi rendszerességgel dolgozott. Munkásságának eredményét 106 megjelent dolgozat jelzi, melyek majdnem mind német nyelven jelentek meg. Az utóbbi egy-két évtizedben ez nem kedvezett olvasottságának, mégis szerte a világon sokat hivatkoztak és hivatkoznak eredményeire. Közel négy évtizedes matematikai kutató munkásságában sok differenciálgeometriai kérdéssel foglalkozott, azonban ezek szinte mindegyike valamilyen formában kapcsolódik a FINSLER geometriához. Ez volt munkásságának a központi területe. Sok matematikus munkássága, vagy legalábbis élete egy hosszabb szakaszának az eredménye egyetlen kérdés köré csoportosítható. MOÓR ARTHURNÁL ez nincs így. Ezért munkáinak az áttekintő ismertetése meglehetősen nehéz. Vagy igen hosszú lenne, vagy nagyon hézagos, és akkor is csak a szigorúan vett szakemberek számára érthető. De itt most nem is ezt a feladatot tűzzük magunk elé, hanem mindössze munkásságának területét kívánjuk az általános matematikai érdeklődéssel rendelkezők számára kissé megvilágítani, közelebb hozni.

Hogy a FINSLER geometria tárgyát és helyét megvilágítsuk érdemes kissé messzebbről elindulni. A geometria (eredeti értelme szerint földmérés) igen ősi tudomány, a matematikának a számolástól eltekintve a legrégibb ága. Tételei szemléletesek, szinte mindenki számára közérthetőek. Érdekes, hogy a bizonyítások ebben a tudományágban csak a Kr. e. VI. évszázadban jelentek meg az akkor kifejlődött logika alkalmazásaként és rögtön robbanásszerű fejlődést indítottak el. A bizonyítások kezdeti megjelenésétől számított két évszázad elég volt arra, hogy elkészüljön EUKLIDESZ Elemek című műve, mely a matematikának a szigorú logikai elvekre épített oly masszív és grandiózus építményét jelentette, amit két évezreden át csak áhítattal tudtak csodálni. Nem tudom, hogy a matematikának azóta is volt-e ily meredek fejlődési szakasza.- EUKLIDESZ néhány minimális számú, bizonyítás nélküli alapigazságra, axiómára építette geometriáját. Minden állítását és tételét ezekből logikai úton vezette le. Az axiómák mind egyszerű kijelentések, melyek igazságában senki sem kételkedett. Ezek közül az utolsót, a jól ismert párhuzamossági axiómát azonban sokan a többi következményének és így feleslegesnek, elhagyhatónak vélték. Ez a probléma 2000 évig nem nyert megnyugtató megoldást, egészen Bolyai János felfedezéséig. BOLYAI JÁNOS apja, BOLYAI FARKAS, Göttingenben GAUSS hallgatótársa volt, és onnan hozta magával a "parallelák problémáját", amit azonban ő sem tudott megoldani. A megoldás végül JÁNOSnak sikerült, aki megmutatta, hogy a párhuzamossági axióma nem bizonyítható a többi axiómából, de ezt úgy mutatta meg, hogy a többi axiómából és a párhuzamossági axióma tagadásából egy teljes ellentmondásmentes geometriát, egy merőben más, új világot (geometriát) épített fel. És ez messze túlmutatott az eredeti probléma megoldásán. Ez olyan hatású és jelentőségű esemény volt a geometriában, mint a heliocentrikus világkép megalkotása a geocentrikussal szemben a csillagászatban. Egy más geometria gondolata (ahol más a távolság, más tulajdonságú az egyenes, a párhuzamosság, stb.) korának legtöbb matematikusa számára felfoghatatlan, vagy legalábbis elfogadhatatlan volt. Nem is aratott gyors sikert. BOLYAI JÁNOSnak életében semmi sem jutott a megérdemelt dicsőségből, de N. I. LOBACSEVSZKIJnek is, aki tőle függetlenül jutott jelentős mértékben hasonló eredményre, csak kevés. Amilyen nehezen és lassan indult meg az új geometria gondolatának az elfogadása, épp oly feltartóztathatatlanul haladt előre. Sőt, B. RIEMANN 1854-ben Göttingenben az idős GAUSS jelenlétében (GAUSS halála előtti évben) GAUSS felületelméleti munkáira építve már egy újabb geometriának, a róla elnevezett RIEMANN-geometriának az alapjait vázolta fel, sőt tulajdonképpen már az úgynevezett FINSLER geometria lehetőségét is felvetette, és ezzel BOLYAI JÁNOS úttörő lépése után megindította az újabb és újabb geometriák létrehozásának a sorát. Miről is van szó?

Ismeretes, hogy az euklideszi síkon DESCARTES koordinátarendszerben az

$x = x(t),\ y = y(t)$ függvényekkel megadott C görbének a $P(t_1),\ P(t_2)$

pontok közé eső ívhossza $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x^2 + y^2}\, dt.$

Ugyanez az s ívhossz egy (u, v) görbevonalú koordinátarendszerben az

$S = \int_{t_1}^{t_2} (E(u,v)\dot{u}^2 + 2F(u,v)\dot{u}\dot{v} + G(u,v)\,\dot{v}^2)^{1/2}\, dt$ formában

adódik, ahol az E, F, G függvények az $(x,y) \leftrightarrow (u,v)$

koordinátatranszformáció által vannak meghatározva.

Ez az $E \equiv g_{11}$, $F \equiv g_{12} = g_{21}$, $G \equiv g_{22}$, $u \equiv u^1$, $v \equiv u^2$

jelölés alkalmazásával az

$$(1) \qquad s = \int_{t_1}^{t_2} \left(g_{\alpha\beta}(u^1,u^2)\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta\right)^{1/2} dt$$

alakra vezet, ahol α-ra és ß-ra is szummációt értünk 1-től a dimenziószámig, itt 2-ig. RIMANN-nak az újabb geometriához vezető jelentős ötlete igen egyszerű volt. Tekintsünk a síkon (lényegében) önkényesen megadott $g_{\alpha\beta}\ (u^1,\ u^2)$ függvényeket (ahol $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$), és egy görbe ívhosszát értelmezzük az (1) integrállal. RIEMANN könnyen be tudta látni, hogy ez általában nem azt jelenti, hogy az euklideszi síkot valamilyen görbevonalú koordinátarendszerben tárgyaljuk, mert adott $g_{\alpha\beta}\ (u^1,u^2)$ -hez általában nem található olyan $(x,y) \leftrightarrow (u^1,u^2)$ koordinátatranszformáció, melynek a fellépő E, F, G függvények épp az adott $g_{\alpha\beta}$ (u^1,u^2)-k. Így az ilyen ívhosszmérésre épített geometria különbözik az euklideszitől. Ez a RIEMANN geometria.

- Az (1) integrál integrandusa egy $\dot{u}^1, \dot{u}^2$ -ben elsőfokú pozitív homogén függvény, azonban az ilyenek között egy igen egyszerű, egy erősen speciális. RIEMANN már akkor, 1854-ben felvetette egy olyan geometria lehetőségét, melyben a C görbe ívhossza (1) helyett egy $s = \int_{t_1}^{t_2} F(u^1, u^2, \dot{u}^1, \dot{u}^2)$ integrállal van értelmezve. Az első gondolatok minden nehézség nélkül átvihetők tetszőleges véges dimenzióra. Így ha a tér pontjainak a koordinátáit a szokásosabb $x^1, x^2, \ldots x^n$-el, vagy rövidebb x -el, jelöljük, akkor az x (t) által adott C görbe ívhosszát most az

(2) $\quad s = \int_{t_1}^{t_2} F(x, \dot{x})\, dt$

integrál értelmezi, ahol feltesszük, hogy $F(x, \lambda\dot{x}) = |\lambda| F(x, \dot{x})$. Míg azonban az (1) ívhossz értelmezésre épített RIEMANN geometria kiépítése hamarosan megkezdődött és eredményesen haladt előre, addig a (2) ívhossz értelmezésre épített geometria gondolata teljesen feledésbe merült, mígnem 1918-ban a svájci P. FINSLERnél egy variációszámítási probléma kapcsán RIEMANNtól teljesen függetlenül újra felszínre nem került.

- Nos ez a geometria lett MOÓR ARTHUR vizsgálatainak központi tárgya. A FINSLER geometria jelentősége abban rejlik, hogy ez egy bizonyos természetes és józan követelményeknek eleget tevő legáltalánosabb geometria. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy míg euklideszi geometria csak egy van, addig RIEMANN geometriából már több, nevezetesen minden $g_{\alpha\beta}$ (x) -hez tartozik egy RIEMANN geometria, a FINSLER geometria pedig a geometriák egy egész családja, minden $F(x.\dot{x})$ alapfüggvény más-más FINSLER geometriát határoz meg. (Az euklideszi geometria unicitására vonatkozó megjegyzésünk azt jelenti, hogy bár az euklideszi geometriában különböző DESCARTES-féle és görbevonalú koordinátarendszerek használhatók és ezektől függően pl. az ívhossz formulája más és más - mint azt fentebb már említettük - addig magának az ívhossznak, vagy egy háromszög területének, stb. az értéke független az éppen használt koordinátarendszertől.) Ebből kifolyólag viszonylag kevés olyan jelentős tétel létezik, mely minden FINSLER geometriára egyformán vonatkozik. Ezért fontos feladat a FINSLER geometriák kisebb csoportjainak a vizsgálata, különösen az egyszerűbbeké, a RIEMANN, vagy az euklideszi geometriához közelebb állóké. Ilyen pl. az a MOÓR ARTHUR által alaposan vizsgált eset, amikor $F(x.\dot{x})$ egy $\dot{x}^i$-ben (i = 1, 2,….., n) k-ad fokú polinomból vont k. gyök, ahol a polinom együtthatói x-től függnek. Ezt az irodalomban BERWALD-MOÓR metrikának nevezik. Ez egy speciális esete a ma gyakran vizsgált 1-forma metrikának, ahol $F(x.y)\colon = G(y^i)\quad y^i = w_x^i(\dot{x})$, melyben G egy y^i-ben első fokú pozitív homogén függvény, $w_x^i(\dot{x})$, pedig n-számú l-forma $\dot{x}$-ben x-től függő együtthatókkal.

Ha FINSLER geometriáról beszélünk, az ívhossz mérés mellett feltétlenül meg kell említenünk egy vele egyenrangúan fontos kérdést. Ez a vektorok párhuzamossága. Euklideszi térben ez igen egyszerű kérdés: két különböző pontból kiinduló vektor akkor párhuzamos, ha a komponenseik megegyezőek. Ez a kijelentés azonban a DESCARTES koordinátarendszerhez van kötve. Ilyen koordinátarendszer pedig RIEMANN, vagy FINSLER térben általában nem létezik ill. ha létezik, akkor a tér euklideszi, vagy MINKOWSKI tér. A vektorok párhuzamosságának értelmezése és ennek a metrikához való kapcsolata egy igen lényeges és fontos kérdés. Ennek megoldatlansága jó ideig a RIEMANN geometria kifejlődését is jelentősen hátráltatta. A kérdést a RIEMANN geometria esetén az olasz T. LEVI-CIVITA oldotta meg 1917-ben. A tér x pontjában vett $\zeta^i(x)$ komponensű vektorhoz a szomszédos x+dx pontban azt a $\zeta^i(x+dx)$ komponensű vektort tekintette definíció szerint párhuzamosnak (párhuzamosan eltoltnak), melynél a $\Delta\zeta^i \equiv \zeta^i$ $(x + dx)$- $\zeta^i(x)$ különbség dx^k-ban lineáris fő része $\zeta^i(x)$-ben is lineáris, tehát $d\zeta^i = \Gamma^i_{jk}(x)\ \zeta^i(x)dx^k$. Egy ilyen párhuzamos eltolás nyilván a $\Gamma^i_{jk}(x)$ összefüggési koefficiensek által van meghatározva. Ha egy RIEMANN térben a párhuzamosan eltolt vektorok hossza változatlan, akkor a párhuzamos eltolás metrikus. A metrikusság és a $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ megkövetelése az összefüggési koefficienseket és így magát a párhuzamos eltolást is a g_{ij} (x) -ből egyértelműen meghatározhatóvá teszi. FINSLER térben a párhuzamos eltolás metrikusságának a kérdése ilyen értelemben sajnos nem oldható meg. Ezt a követelményt csak É. CARTAN " tudta kielégíteni 1934-ben, a vonalelem terekre való áttérés eredményének az árán. A FINSLER geometriának és így MOÓR ARTHUR munkásságának minden kérdése lényegében az ismertetett metrikához és párhuzamossághoz, vagy az ahhoz legszorosabban kötődő kovariáns- és abszolútderivációhoz kapcsolódik. Az általa vizsgált kérdéskörök közül néhányat konkrétan felsorolunk: konstans és skalár görbületű FINSLER terek, tovább általánosított párhuzamos eltolás, ezzel kapcsolatos invariáns differenciál és görbületelmélet, rekurrens görbületű terek, pályageometria, FINSLER és CARTAN terek dualításelmélete, equivalens variációszámítási problémák, OTSUKI terek, geometriai objektumok elmélete, vektor-sűrűség terek.

MOÓR ARTHUR ma a FINSLER geometria kézikönyveiben az egyik leggyakrabban és legtöbbet idézett szerző. A konkrét eredmények ismertetése helyett álljon itt végül a mindennél többet mondó, önmagáért beszélő irodalmi munkásságának gazdag jegyzéke.

MOÓR ARTHUR volt évfolyamtársa, barátja és kollégája: TAMÁSSY LAJOS tanszékvezető egyetemi tanár (Debrecen, Kossuth Lajos Tudományegyetem Geometriai Tanszék) előadása, ami 1989. november 17-én hangzott el Sopronban, az Erdészeti és Faipari Egyetem emlékülésén.

MOÓR ARTHUR
szakirodalmi munkássága

Espaces métriques dont le scalire de courbure est constatnt. – Buletin des Sciences Mathématiques, 1950, **74**: 1-19

Finslersche Räume mit der Grundfunktion. – Commentarii Mathematici Helvetici, 1950, **24** 188-194.

Généralisation du scalaire de courbure et du scalaire principal d'un escape finslérien á n-dimension. – Canadian Journal of Mathematics, 1950, **2**: 302-303.

Erweiterung des Vierscheitelsatzes auf dreidimensionale Kurven. – Duke Mathemetical Journal, 1951, **18**: 509-516.

Einführung des invarianten Differentials und Integrals in allgemeinen metrischen Rämen. – Acta Mathematica, 1951, **86**: 71-83.

Entwicklung einer einheltlichen Feldteorie begründet auf die Finslershe Geometrie. (Mit J. Horvath) – Zeitschrift für Physik, 1952, **131**: 544-570.

Quelques remarques sur la généralisation du scalaire de courbure et du scalaire principal. – Canadian Journal of Mathematics, 1952, **4**: 189-197.

Über die Scheitelpunkte der zwei- und dreidimensionalen Kurven. – Monatshefte für Mathematik, 1952, **56**: 150-163.

Über oskulierende Punkträume von affinzusammenhängenden Linienelementmannigfaltigkeiten. – Annals of Mathematics, 1952, 56: 397-403.

Über die Dualität von Finslerschen und Cartanschen Rämen. – Acta Mathematica, 1952, 88: 347-370.

Finslersche Räme mit Algebrischen Grundfunktionen. – Publicationes Mathematicae (Debrecen), 1952, **2**: 178-190.

Über zwei Extremaligenschaften des Kreisbogens und der Kugelfläche. (Mit S. Török) – Acta Scienciarum Mathematicarum, 1954, **15**: 157-163.

Die oskulierenden Riemannschen Räme regularer Cartanscher Räme. – Acta Mathematica Academian Scientiarum Hungaricae, 1954, 5: 59-72.

Reguláris Cartan-féle terek oszkuláló Riemann terei – MTA III. Osztály Közleményei, 1954, **4**: 243-248.

Ergänzung zu meiner Arbeit: „Über die Dualitä von Finsleschen und Cartanschen Rämen". – Acta Mathematica, 1954, **91**: 187-188.

Über affinzusammenhängende Manningfaltigkeiten von Hyperflächen-elementen inbesondere deren Äquivalenz. (Mit Gy. Soós). - Acta Scientarium Mathematicarum, 1955, **16**: 29-42.

Entwicklung einer Feldtheori begründet auf einem allgemeinen metrischen Linienelementraum I. und II. (Mit J. Horvath) – Indagationes Mathematicae, 1955, **17**: 421-429, 581-587.

Metrische Dualität der allgemeinen Räume. – Acta Scientiarum Mathematicarum, 1955, 16: 171-196.

Általános metrikus vonalelemtérre alapozott térelmélet (Társszerző: Horváth János). – MTA III. Osztály Közleményei, 1956, **6**: 53-72.

Allgemeine metrische Räume von skalarer Krümmung. – Publicationes Mathematicae (Debrecen), 1956, **4**: 207-228.

Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linien-elementräume. – Acta Scientiarum Mathematicarum, 1956, **17**: 85-120.

On the Extremals of the Generalized Metric Spaces. – Buletinul Institutului Politechnic din Jasi, 1956, **2**: 19-26.

Über den Schurschen Satz in allgemeinen metrischen Linien-elementräumen. – Indagationes Mathemeticae, 1957, **19**: 290-301.

Über die autoparalelle Abweichung in allgemeinen metrischen Linienelementräumen. – Publicaciones Mathematicae (Debrecen), 1957, **5**: 102-118.

Über die Torsions- und Krümmungsinvarianten der dreidimensioslen Finslerschen Räume. – Mathematische Nachrichten, 1957, **16**: 85-99.

Konformgeometrie der verallgemeinerten Schouten-Haantjesschen Räume I. und II. – Indagationes Mathematicae, 1958, **20**: 94 -113.

Untersuchungen Räumen mit rekurrenter Krümmung. – Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1958, **199**: 91-99.

Über die kovariante Ableitung der Vektoren. – Acta Scientiarum Mathematicarum, 1958, 19: 237-246.

Über Tensoren, die aus angegebenen geometrischen Objekten gebildet sind. – Publicationes Mathemeticae (Debrecen), 1959, **6**: 15-25.

Über nicht-holonome allgemeine metrische Linienelementräume. – Acta Mathematica, 1959, **101**: 201-233.

Über die aus g_{ik} bestimmte kovariante Ableitung. – Acta Mathematica Academian Scentiarum Hungaricae, 1960, **11**: 175-186.

Erweiterung des Begriffs der Räume skalarer und konstanter Krümmung. – Acta Scientarium Mathematicarum, 1960, **21**: 53-77.

Untersuchungen über die kovariente Ableitung in Linienelementräumen. – Publicationes Mathematicae (Debrecen), 1960, **7**: 41-53.

Nichtlineares invariantes Differential. – Annali di Mathematica Pura ed Applicata, 1961, **54**: 255-273.

Über die konform-kovariente Ableitung der Vektoren. – Publicationes Mathematicae (Debrecen), 1961, **8**: 117-127.